Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 20, núm. 2, 2005. Pàg. 165–188

El problema dels deu martinis. Un problema tancat

Joaquim Puig i Sadurní

Resum En aquest article exposem la solució del «problema dels deu martinis», plantejat el 1981 arran d'un problema de la física matemàtica i recentment tancat, sobre l'estructura cantoriana de l'operador «Almost Mathieu». N'explorarem breument les motivacions físiques i les diferents formulacions en diferents contextos, per acabar donant una idea de la demostració.

Paraules clau: problema dels deu martinis, conjunt de Cantor, operador de Schrödinger, sistemes dinàmics.

Classificació MSC2000: 11K60, 39A70.

Els problemes matemàtics, especialment aquells que se'ns ofereixen sota una formulació tancada i ben precisa han exercit una poderosa influència en la història de les matemàtiques com a catalitzadors de nous desenvolupaments que, en un bon nombre de casos, han resultat ser més interessants que els problemes que intentaven resoldre.

En aquest article ens proposem presentar l'anomenat «problema dels deu martinis», que ha estat resolt recentment i esperem que això ens serveixi d'excusa per poder fer un recorregut per una sèrie de resultats i conceptes que són a cavall de la física matemàtica i els sistemes dinàmics. La nostra estratègia serà presentar en les primeres tres seccions diferents formulacions del problema dels deu martinis, que ens permetran endinsar-nos en els conceptes i resultats subjacents. En la darrera secció repassarem els resultats que en els darrers vint anys s'han anat obtenint en aquest problema i acabarem donant un esbós de la demostració del problema dels deu martinis per a freqüències diofàntiques i acoblament no crític.

1 L'equació de Harper i la formulació dinàmica

La formulació més senzilla del problema dels deu martinis fa referència a l'anomenada equació en diferències de Harper

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

on la incògnita, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, és una successió de nombres reals i a, b, ω i ϕ són paràmetres reals. El fet que aquesta equació, com veurem després, provingui de diversos problemes físics motiva que aquests paràmetres rebin una denominació especial. Així, el paràmetre a s'anomena *paràmetre espectral* o *energia*. El terme $b\cos(2\pi\omega n + \phi)$ és un terme *periòdic* si la *freqüència* ω és racional o bé *quasiperiòdic* en cas que sigui irracional. En qualsevol dels dos casos b és un paràmetre d'*acoblament*, ja que per a $b = 0$ el terme en cosinus desapareix. Finalment, ϕ, que només és rel·levant mòdul 2π, és a dir, a $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, s'anomena la *fase*.

Com és ben sabut, podem resoldre el problema de valors inicials associat a l'equació de Harper (1) per a cada parella de condicions inicials a $\mathbb{R}^2$. Per fer-ho podem escriure-la com a sistema de primer ordre en formulació matricial

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a - b\cos(2\pi\omega n + \phi) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{a,b}(2\pi\omega n+\phi)} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

i, per tant, per a qualsevol $k \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \underbrace{A_{a,b}(2\pi\omega k + \phi)\ldots A_{a,b}(\phi)}_{M_{a,b}(n,\omega,\phi)} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix},$$

mentre que, per a $k < 0$,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = A_{a,b}(-2\pi\omega(k+1) + \phi)^{-1}\ldots A_{a,b}(-2\pi\omega + \phi)^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

El fet que puguem escriure l'equació com un sistema de primer ordre, per bé que elemental, ens estalvia molts maldecaps, ja que passem d'un problema «de dimensió infinita» (com és buscar totes les successions que satisfan una certa equació en diferències) a un problema amb dos graus de llibertat. A més, a conseqüència de la linealitat del sistema, per a passar de les condicions inicials a l'evolució per un cert $n \in \mathbb{Z}$ només cal que multipliquem per una matriu,

$$M^{(N)}_{a,b,\omega}(\theta) = \begin{cases} A_{a,b}\left(\theta + 2\pi\omega(N-1)\right)\ldots A_{a,b}(\theta), & \text{si} \quad N > 0 \\ I, & \text{si} \quad N = 0 \\ A^{-1}_{a,b}\left(\theta - 2\pi\omega N\right)\ldots A^{-1}_{a,b}(\theta - \omega), & \text{si} \quad N < 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

que s'anomena la *matriu de transferència* o *matriu fonamental*.

L'existència d'una matriu de transferència ens condueix al terreny de la *dinàmica*, on ens preguntem per quina és l'evolució dels sistemes (en el nostre cas les solucions de l'equació de Harper) en funció del temps (per a nosaltres variable discreta n). Més concretament, una primera formulació del problema dels deu martinis pot fer-se estudiant el problema de *l'estabilitat* per a l'equació de Harper. Per això cal que introduïm una definició del que entenem per estabilitat en l'equació de Harper, que ens convingui per al que necessitem. Direm que l'equació de Harper, per a uns certs a, b i ω, és *totalment inestable* si per a qualsevol $\phi \in \mathbb{T}$ l'equació

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

no té cap solució *acotada*, és a dir, $x = (x_n)_n$ amb

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < \infty,$$

llevat de la trivial, que és la que té tots els termes iguals a zero. Per tant, una equació de Harper no serà totalment inestable si podem trobar alguna fase ϕ per a la qual hi hagi una solució acotada no trivial. Amb aquesta definició podem donar una primera formulació del

Problema dels deu martinis Si $b \neq 0$ i ω és irracional el conjunt d'energies a per a les quals l'equació de Harper no és inestable és un *conjunt de Cantor*.

Observació Per un conjunt de Cantor entendrem un conjunt que sigui *perfecte* (és a dir, sense punts aïllats) i *no-dens enlloc* (és a dir que la seva adherència tingui interior buit). L'exemple més conegut de conjunt de Cantor és el conjunt ternari, que s'obté recursivament traient intervals centrats de longitud un terç de l'anterior d'un interval finit de la recta real, tal i com es mostra a la figura 1. A diferència del conjunt de Cantor ternari, els conjunts de Cantor del problema dels deu martinis tindran mesura positiva, llevat del cas en què $b = \pm 2$. Hom pot també construir conjunts de Cantor de mesura positiva amb el mateix procediment que el del conjunt ternari si mantenim la posició del punt mig dels intervals que traiem, fem que aquests no tinguin longitud un terç de l'anterior sinó una porció més petita, per exemple, un quart.

figura 1: Generació del conjunt ternari de Cantor.

El nom d'aquest problema prové d'una juguesca que féu el matemàtic Marc Kac a la trobada anual del 1981 de la American Mathematical Society, en la qual rebé l'honor de ser el «Colloquium Lecturer». Segons sembla, en la seva xerrada i arran d'una pregunta de Barry Simon, oferí deu martinis a qui resolgués el problema (que havia estat conjecturat per primer cop per Az'bel el 1960, [8]). Barry Simon mateix ([28]) l'anomenà així en una llista d'una dotzena de problemes oberts en operadors de Schrödinger. Veurem en aquesta exposició com aquest problema ha estat recentment resolt.

Abans de presentar altres formulacions del problema dels deu martinis, fixem-nos un moment en les hipòtesis d'aquest. En primer lloc, veurem que la hipòtesi que ω sigui irracional és necessària. Comencem, doncs, amb el cas de freqüència racional més simple: $\omega = 0$. En aquest cas la matriu del sistema de primer ordre (2)

$$A_{a,b}(2\pi\omega n + \phi) = A_{a,b}(\phi)$$

és constant per a qualsevol $n \in \mathbb{Z}$. Això vol dir que la matriu fonamental és senzillament una potència n-èsima:

$$M_{a,b}(k,\omega,\phi) = A_{a,b}\,(2\pi\omega(k-1)+\phi)\ldots A_{a,b}(\phi) = A_{a,b}(\phi)^k$$

i la solució del problema de valors inicials és molt senzilla (tant com multiplicar matrius),

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A_{a,b}(\phi)^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Per a poder veure l'estructura de les zones d'estabilitat, cal que donem un criteri pel qual les potències d'una matriu constant actuen deixant vectors acotats. Aquesta és una qüestió clàssica en matrius de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, és a dir, matrius quadrades en dimensió dos i determinant igual a 1 (vegeu, per exemple, la presentació d'Arnol'd, [1]). Sigui, doncs, P una matriu de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Els seus valors propis satisfan l'equació característica

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} P\lambda + 1 = 0$$

i determinen l'existència de solucions acotades en l'equació

$$v_{n+1} = Pv_n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{4}$$

on v_n pertany a $\mathbb{R}^2$ de la manera següent. Si $|\operatorname{tr} P| > 2$, aleshores els valors propis de P són reals i diferents, amb mòdul diferent de 1 i, per tant, la iteració (4) no té solucions acotades fora de la trivial. Altrament, si $|\operatorname{tr} P| \le 2$, sempre hi ha algun vector propi amb valor propi de mòdul 1 i, per tant, el sistema (4) té alguna solució no trivial que és acotada.

Si tenim en compte això darrer podem donar ja les zones d'estabilitat de l'equació de Harper per al cas trivial $\omega = 0$. En efecte, només cal calcular la traça de la matriu de Floquet, és a dir,

$$\operatorname{tr} A_{a,b}(\phi) = a - b\cos(\phi)\,.$$

Així, doncs, els valors de a totalment inestables per a un $b \in \mathbb{R}$ fixat són les energies $a \in \mathbb{R}$ que compleixen

$$|a - b\cos(\phi)| > 2$$

per a qualsevol $\phi \in \mathbb{T}$. D'això resulta que l'equació de Harper per a $\omega = 0$

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(\phi)x_n = ax_n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

és totalment inestable si, i només si, $|a| > 2 + |b|$. Per tant, cal demanar que ω sigui diferent de zero, ja que en aquest cas només hi ha dues *zones d'inestabilitat*, els intervals $(-\infty, -2 - |b|)$ i $(2 + |b|, +\infty)$, que estan separats per la *banda d'estabilitat* o *banda espectral* $[-2 - |b|, 2 + |b|]$ que no és, clarament, un conjunt de Cantor. És clar que la zona d'estabilitat tampoc serà un conjunt de Cantor quan sigui la unió d'un conjunt finit de bandes d'estabilitat. Anem a veure que això és el que s'esdevé quan ω és un número racional.

Considerem, doncs, *l'equació de Harper periòdica*, que s'esdevé quan $\omega = p/q$ amb $p, q \in \mathbb{N}$ primers entre ells. En aquest cas la matriu de transferència no és la potència d'una matriu constant sinó que només cada cert nombre d'iteracions:

$$M_{a,b}\left(kq, \phi, \frac{p}{q}\right) = M_{a,b}\left(q, \phi, \frac{p}{q}\right)^k \equiv P_{a,b}^{p,q}(\phi)^k,$$

on $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ és l'anomenada *matriu de Poincaré*. L'evolució del sistema de primer ordre associat a temps qk, per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$, també ve donat per les potències de la matriu de Poincaré:

$$\begin{pmatrix} x_{qk+1} \\ x_{qk} \end{pmatrix} = P_{a,b}^{p,q}(\phi)^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Així, doncs, per a estudiar l'estabilitat de *l'equació de Harper periòdica*,

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos\left(2\pi\frac{p}{q}n + \phi\right) = ax_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

n'hi ha prou amb calcular la traça de $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$. En efecte, encara que la traça de la matriu de Poincaré només ens doni informació de l'estabilitat dels iterats múltiples de q del sistema de primer ordre, per a recuperar els altres iterats només ens cal multiplicar aquesta matriu de Poincaré per un màxim de $q - 1$ matrius (que sempre seran les mateixes a causa de la periodicitat del sistema). Per tant, l'equació de Harper periòdica serà estable, per a uns certs a, b i ϕ si, i només si, la traça de $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ és a l'interval $[-2, 2]$. Si fixem b i q, aquesta traça (sovint anomenada també *discriminant*) és un polinomi de grau q en a. Les regions d'estabilitat, doncs, formen un màxim de q bandes espectrals disjuntes. Aquestes estan separades per intervals oberts d'inestabilitat que s'anomenen, en aquest context, *zones prohibides* (més endavant també ens hi referirem com a *forats espectrals*). A més, l'anomenat *principi d'oscil·lació* de la traça (e. g. [23]) ens assegura que l'equació $\operatorname{tr} P_{a,b}^{p,q}(\phi) = 2$ (resp. -2) té exactament q arrels comptant multiplicitats i que aquesta és com a màxim 2 (vegeu la figura 2).

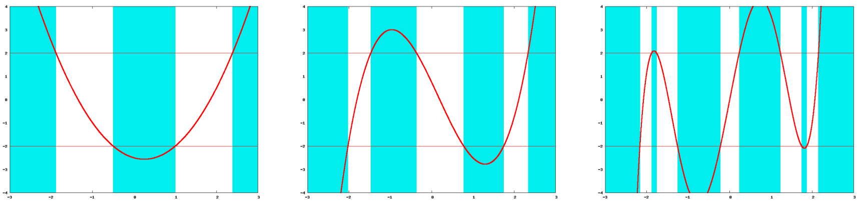

FIGURA 2: Discriminant de l'equació de Harper periòdica en funció de a per a diferents valors racionals de ω amb $\phi = 0$ i $b = 1$. D'esquerra a dreta, $1/2$, $2/3$ i $3/5$. A les zones sense sombrejar el valor absolut del discriminant és menor o igual que dos i, per tant, les energies corresponents formen una banda espectral.

Tenint en compte que la matriu de Poincaré ens dóna els iterats múltiples de q, podem relacionar els diferents valors de la seva traça amb les solucions del sistema de primer ordre:

1 PROPOSICIÓ *Sigui $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ la matriu de Poincaré de l'equació de Harper periòdica*

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos\left(2\pi\frac{p}{q}n + \phi\right) = ax_n\,, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

amb p i q primers entre ells. Aleshores:

- *Si $|\,tr\,P_{a,b}^{p,q}(\phi)| > 2$, (6) no té solucions acotades fora de la trivial.*
- *Si $|\,tr\,P_{a,b}^{p,q}(\phi)| < 2$, totes les solucions de (6) són acotades.*
- *Si $tr\,P_{a,b}^{p,q}(\phi) = \pm 2$ i $P_{a,b}(\phi) \neq \pm I$, (6) té una única solució periòdica (resp. antiperiòdica si la traça és -2) $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de* període *q, $x_{n+q} = x_n$ (resp. $x_{n+q} = -x_n$) per a qualsevol n (llevat de normalització).*
- *Si $P_{a,b}^{p,q}(\phi) = \pm I$, totes les solucions són periòdiques o antiperiòdiques amb període q.*

Van Mouche ([31]), usant el teorema de Bézout per a corbes projectives planes, demostrà que la situació en què dues bandes d'estabilitat de l'equació de Harper s'ajunten només s'esdevé en casos excepcionals.

2 TEOREMA (VAN MOUCHE, [31]) *Si $b \neq 0$ i $\omega = p/q$ és racional, l'equació de Harper té almenys $q-1$ bandes d'estabilitat disjuntes per a qualsevol $\phi \in \mathbb{T}$. L'operador té $q-1$ bandes només quan*

1. *q és múltiple de 4 i $\phi \in (2\pi/q)\mathbb{Z}$,*
2. *q és parell i $\phi \in \pi/q + (2\pi/q)\mathbb{Z}$,*

en què el forat central degenera a $\{0\}$.

Així, doncs, encara que en el cas periòdic el conjunt d'estabilitat no és un conjunt de Cantor, el resultat anterior té com a conclusió que una successió d'equacions de Harper periòdiques amb període q que tendeixi a infinit tindrà un nombre de bandes espectrals disjuntes tendint a infinit.

Una manera de visualitzar això és a través dels diagrames de la figura (3), que s'anomenen *papallones de Hofstadter* ([15]) introduïts per Douglas Hofstadter mateix i popularitzats posteriorment a [16]. Per a un valor de b fixat es representen en la direcció vertical freqüències racionals p/q i en l'horitzontal els valors d'energies estables de la corresponent equació de Harper. En prendre els denominadors valors molt alts (i aproximar molt bé irracionals) es té una idea de quina pot ser l'estructura de les zones d'estabilitat en el cas quasiperiòdic de ω irracional. Aquesta coexistència harmoniosa de bandes i conjunts de Cantor sorprengué a Hofstadter mateix, que escrigué: «com que petites variacions en ω poden produir enormes fluctuacions en el valor del denominador q, hom es troba, aparentment, amb una predicció física inacceptable. Tanmateix, la natura és prou enginyosa per trobar el seu camí en aquesta aparent anormalitat.» ([15])

2 L'operador «Almost Mathieu» i la formulació espectral

En la secció anterior, i gràcies a la proposició 1, hem vist una manera d'interpretar el problema dels intervals d'estabilitat en funció de l'existència de solucions periòdiques o antiperiòdiques. Per a uns certs valors de b i ϕ fixats, en comptes de cercar els valors de a que tenen discriminant 2 o -2, podem intentar trobar directament els valors de a que fan que l'equació de Harper periòdica tingui solucions $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *q-periòdiques*,

$$x_{n+q} = x_n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

o bé *q-antiperiòdiques*

$$x_{n+q} = -x_n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Com que l'equació de Harper és lineal i només cal trobar q termes de la successió, la recerca d'aquestes solucions és equivalent a un problema *espectral*, de valors i vectors propis. En efecte, els extrems de les bandes d'estabilitat vénen donats pels valors de a que siguin valors propis de la matriu de dimensió q:

$$H^+_{b,p/q,\phi} = \begin{pmatrix} b\cos(\phi) & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & b\cos\left(\phi - \frac{2\pi p}{q}\right) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b\cos\left(\phi - \frac{2\pi(q-1)p}{q}\right) \end{pmatrix}$$

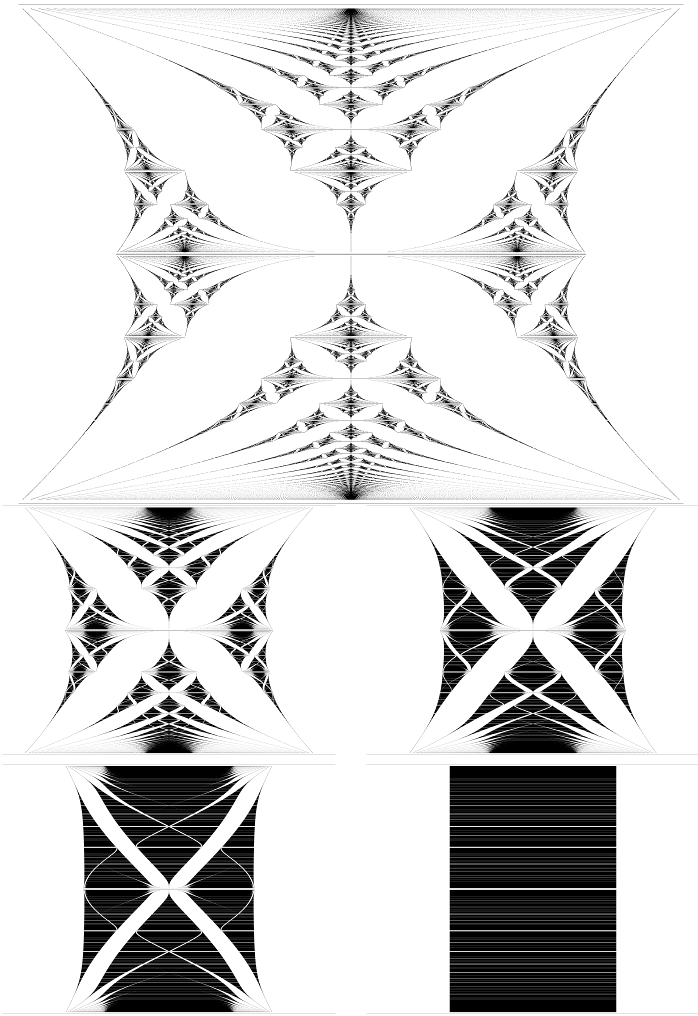

FIGURA 3: Papallones de Hofstadter per a diferents valors de b. De dalt a baix i d'esquerra a dreta $b = 2, 1.5, 1, 0.5$ i 0. El nom de «papallona de Hofstadter» es reserva habitualment al cas $b = 2$ en què la mesura dels valors estables de a, per a freqüències irracionals, és 0 (vegeu la secció 4). En els altres casos la mesura és sempre positiva i ve donada per la formula $|2|b| - 4|$, com demostraren Jitomirskaya i Krasovsky a [18] (vegeu també la monografia de Last, [22]).

per al problema periòdic i

$$H^{-}_{b,p/q,\phi} = \begin{pmatrix} b\cos(\phi) & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & b\cos\left(\phi - \frac{2\pi p}{q}\right) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 1 & b\cos\left(\phi - \frac{2\pi(q-1)p}{q}\right) \end{pmatrix}$$

per a l'antiperiòdic. Hi haurà exactament q bandes d'estabilitat si tots aquests valors propis són diferents, com ens assegura el teorema 2 per a l'equació de Harper.

Aquesta interpretació espectral permet una altra formulació del problema dels deu martinis. Per això hem de veure com formular el problema espectral quan la freqüència ω és irracional, cosa que ens portarà a un problema espectral en dimensió infinita. L'equació de Harper

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

es pot veure com una equació de valors propis sobre l'espai de successions $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ si definim un operador que actuï sobre aquestes de la manera següent

$$(H_{b,\omega,\phi}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)x_n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

En l'espai de successions aquest és un operador lineal. Per a poder parlar d'espectre haurem de definir una topologia adient sobre un subconjunt de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ i, com que volem preservar el caràcter autoadjunt del problema, considerarem l'espai $l^2(\mathbb{Z})$ de les successions $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tals que

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

A l'espai $l^2(\mathbb{Z})$ l'operador $H_{b,\omega,\phi}$ s'anomena habitualment «Almost Mathieu». És fàcil veure que és *ben definit*, és a dir que si $x \in l^2(\mathbb{Z})$ aleshores també $H_{b,\omega,\phi}x \in l^2(\mathbb{Z})$ i que és *lineal* i *acotat*

$$\left\|H_{b,\omega,\phi}x\right\|_2 \leq (2 + |b|)\,\|x\|_2\,.$$

També és autoadjunt, ja que

$$\langle H_{b,\omega,\phi}u, v\rangle = \langle u, H_{b,\omega,\phi}v\rangle,$$

per a qualsevol parella u, v d'elements de $l^2(\mathbb{Z})$.

A $l^2(\mathbb{Z})$ l'*espectre* de l'operador «Almost Mathieu» és el conjunt de $\lambda \in \mathbb{C}$ per als quals l'operador desplaçat

$$H_{b,\omega,\phi} - \lambda I$$

no té una inversa acotada com a operador de $l^2(\mathbb{Z})$ (de fet, pel teorema de l'Aplicació Oberta només cal veure que no és bijectiva, [27]). Aquest conjunt, que denotarem per Spec $\left(H_{b,\omega,\phi}\right)$, és un subconjunt tancat de l'interval $[-2-|b|, 2+|b|]$. El seu complementari, la *resolvent*, és la unió numerable d'intervals oberts anomenats *forats espectrals* (vegeu la figura 4). Amb aquestes noves eines el problema dels deu martinis ja es pot enunciar en la seva formulació original.

Problema dels deu martinis (Kac i Simon, 1981) Si $b \neq 0$ i ω és irracional, l'espectre de l'operador «Almost Mathieu» és un conjunt de Cantor: els forats espectrals són densos a l'espectre.

Abans de continuar, recordem que, en espais de dimensió infinita com ara $l^2(\mathbb{Z})$, cal distingir entre espectre i valors propis. Una energia $a \in \mathbb{R}$ és un *valor propi* si hi ha un element no nul de l'espai $l^2(\mathbb{Z})$, anomenat vector propi, que satisfaci l'equació de valors propis

$$\left(H_{b,\omega,\phi}x\right)_n = x_{n+1} + x_{n+1} + b\cos(2\pi\omega n + \phi)\, x_n = a x_n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

És fàcil veure que els valors propis, el conjunt dels quals denotem per $\sigma_{pp}(b,\omega,\phi)$, pertanyen a l'espectre, però no a la inversa. Per exemple, l'operador «Almost Mathieu» té sempre espectre no buit però no té valors propis si $|b| < 2$. Tornarem a això en la secció 5.

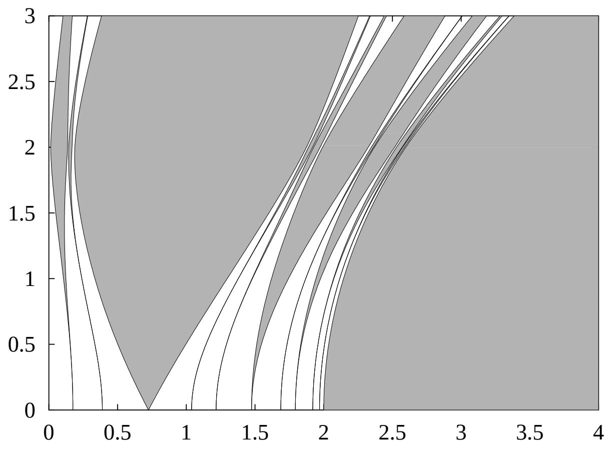

FIGURA 4: Forats espectrals més grans per a l'operador «Almost Mathieu» i $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$. Només es representen valors positius de b per la simetria respecte $a = 0$.

Malgrat la precisió del paràgraf anterior, podem caracteritzar l'espectre en funció de com creixen les solucions de l'equació de valors propis. En efecte, Johnson ([19]) demostrà que, si ω és irracional, a pertany a l'espectre de l'operador «Almost Mathieu» $H_{b,\omega,\phi}$ si, i només si, la corresponent equació de Harper

$$x_{n+1} + x_{n+1} + b\cos\left(2\pi\omega n + \phi\right) x_n = a x_n$$

té una solució acotada no trivial per a algun $\phi \in \mathbb{T}$. Una conseqüència d'aquesta caracterització és que l'espectre, com a conjunt, és independent de ϕ. Denotarem aquest conjunt per $\sigma(b, \omega)$. Una altra, important per a la coherència de la nostra exposició, és que les dues formulacions que hem donat del problema dels deu martinis són equivalents. És a dir, una equació de Harper és totalment inestable si, i només si, el corresponent valor de a no pertany a l'espectre.

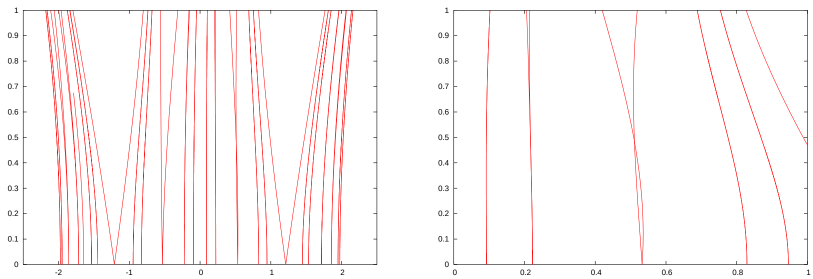

FIGURA 5: Forats espectrals per a l'operador quasiperiòdic de Schrödinger amb $V(\theta) = \cos(\theta) + 0.3\cos(2\theta)$ i $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$. Observem com un dels forats espectrals es tanca per a un valor de b. Representem b a la direcció vertical i a a la horitzontal. A l'esquerra, ampliació al voltant de la «butxaca» que apareix quan un forat espectral que era obert es tanca. Aquestes «llengües» i «butxaques» han estat estudiades per Broer, Puig i Simó a [11].

Com veurem en la darrera secció, l'estratègia per a la demostració del problema dels deu martinis ([26]) consistirà a veure que els forats espectrals són densos a l'espectre per a qualsevol valor de b. No sempre els forats espectrals estan oberts per a tots els valors de b i això és força especial de l'operador «Almost Mathieu». En efecte, si considerem un *operador quasiperiòdic de Schrödinger*,

$$\left(H_{V,\omega,\phi} x\right)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + V(2\pi\omega n + \phi) x_n\,,$$

on V és una funció de 2π-periòdica, podem trobar-nos en què alguns forats espectrals «es tanquin» per a certs valors del potencial V (vegeu [11] i la figura 5).

3 Electrons en un camp magnètic i la formulació física

El model de l'operador «Almost Mathieu» o de l'equació de Harper fou introduït dins la comunitat física per a estudiar el comportament d'electrons sota un camp magnètic. Aquesta aproximació resulta ser il·luminadora de cara a la comprensió de l'efecte de Hall quàntic. Descrivim-lo en primer lloc breument, mentre que per a una introducció més rigorosa (vegeu Bellissard *et al.* [10]).

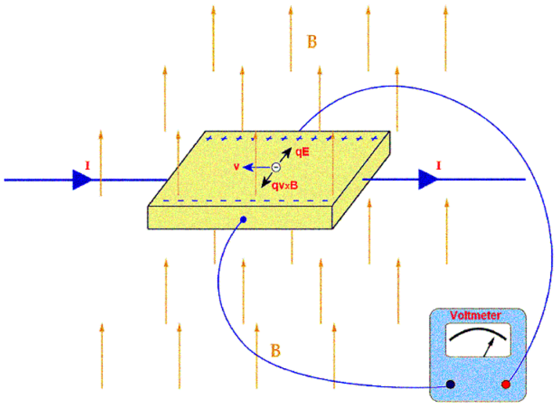

FIGURA 6: Diagrama de l'experiment de Hall clàssic. Figura extreta de Avron *et al.* [7].

Edwin H. Hall, el 1880, realitzà l'experiment següent. Prengué un full prim d'or i un galvanòmetre als dos extrems del full (tal com s'indica a la figura 6). En fer-hi circular un flux elèctric i aplicar-hi simultàniament un camp magnètic orientat verticalment observà com es produïa una diferència de potencial entre els dos extrems del full. A més, observà que aquest *voltatge de Hall*, V_H, augmentava linealment amb la intensitat del camp magnètic. En dividir la intensitat del corrent elèctric pel voltatge de Hall, s'obté l'anomenada *conductància de Hall*, que s'escriu com σ_H. Aquesta té la dimensió de l'invers d'una resistència. Per tant, podem introduir un factor adimensional ν, anomenat *factor d'emplenament* que és directament proporcional al corrent i inversament proporcional al camp magnètic de manera que

$$R_H := \frac{\nu}{\sigma_H},$$

l'anomenada *resistència de Hall* és constant i igual a

$$R_H = \frac{h}{e^2}.$$

Aquest experiment fou important ja que fins aleshores, incloent-hi el mateix Maxwell, es suposava que el camp magnètic actuava sobre el conductor i no sobre els electrons. Això portà a una explicació en termes de les forces de Lorentz.

Aquesta constància es donà per feta durant més d'un segle, fins que Klaus Von Klitzing, el 1980, observà que en temperatures properes al zero absolut i camps magnètics molt intensos la dependència de la resistència de Hall no és lineal sinó que apareixen uns intervals de constància per a certs valors del factor d'emplenament. Von Klitzing féu variar el corrent, però en experiments posteriors es preferí fer variar la intensitat del camp magnètic. A més, en cadascun d'aquests intervals s'observà que la conductància σ_H coincideix, amb una precisió sorprenent, amb nombres enters (vegeu la figura 7). Per això diem que la conductància de Hall està *quantitzada*. De fet, els experiments són tan precisos que han permès calcular R_H, que és una constant universal, amb una precisió de 10^{-8}, cosa que ha fet que actualment les unitats de resistència es defineixin en termes d'aquest experiment.

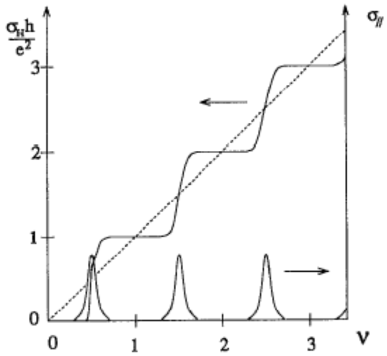

FIGURA 7: Representació esquemàtica de les observacions experimentals de l'efecte de Hall quàntic. La conductivitat de Hall es representa en unitats de e^2/h en funció del factor d'emplenament ν. La línia discontínua representaria la conductivitat de Hall clàssica. La tercera funció representada (que s'anul·la a on la conductància de Hall és constant) és l'anomenada *conductivitat directa*, que no tractem aquí. Extret de [10].

Per a veure com poden explicar-se qualitativament alguns dels trets de l'efecte de Hall quàntic a través del problema dels deu martinis cal que tornem enrere en el temps. Rudolph Peierls, que el 1929 com a estudiant de tesi de Werner Heisenberg havia investigat per què el voltatge de Hall pot tenir diferents signes, proposà amb el seu estudiant P. G. Harper el model següent per a electrons metàl·lics sota camps magnètics el 1955 ([13]). Aquest ve donat pels *operadors magnètics* següents a $l^2(\mathbb{Z}^2)$

$$(U\psi)(n,m) = \psi(n-1,m), \quad (V_\Phi\psi)(n,m) = e^{2\pi i n\Phi}\psi(n,m-1),$$

per a $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, després que una sèrie de simplificacions s'hagin dut a terme. L'espectre de l'operador

$$h(\Phi, c_1, c_2) = c_1 \left(U + U^*\right) + c_2 \left(V_\Phi + V_\Phi^*\right)$$

es pren com a aproximació de l'espectre d'energia d'un electró en una xarxa rectangular sota un camp magnètic perpendicular d'intensitat Φ. Les constants c_1 i c_2 mesuren la intensitat de l'acoblament en les diferents direccions del reticle.

Per a relacionar els operadors magnètics amb l'operador «Almost Mathieu», observem que podem escriure les solucions de l'equació de valors propis de h com

$$\psi(n, m) = e^{i\phi m} \varphi(n)\,,$$

on φ és solució de l'equació

$$\varphi(n-1) + \varphi(n+1) + \frac{2c_2}{c_1} \cos\left(2\pi\Phi n + \phi\right) \varphi(n) = a\varphi(n)\,,$$

que és precisament l'equació Harper amb paràmetres

$$\frac{b}{2} = \frac{c_2}{c_1} \quad i \quad \omega = \Phi.$$

D'aquesta relació és fàcil veure que l'espectre de h és bàsicament el mateix que el de l'operador «Almost Mathieu»:

$$\text{Spec } \left(h(\Phi, c_1, c_2)\right) = \bigcup_{\phi \in \mathbb{T}} \text{Spec } H_{b,\omega,\phi}.$$

Per tant, els paràmetres b i ω en l'operador «Almost Mathieu» tenen una interpretació física. El paràmetre b mesura quina és la interacció de l'electró en les dues direccions principals del reticle. Així el cas $b = 2$ correspon a una interacció igual en les dues direccions i per això s'anomena *cas quadrat*. D'altra banda, la freqüència ω és la intensitat del camp magnètic de tal manera que si $\omega = 0$ no hi ha camp magnètic. Tot i que el model de Peierls i Harper no explica l'efecte de Hall quàntic a causa de les nombroses simplificacions (no té en compte, per exemple, les interaccions electró-electró ni explica la seva sorprenent persistència malgrat les impureses del material) anem a veure la interpretació que es pot donar de l'efecte de Hall quàntic a través de la resposta afirmativa al problema dels deu martinis.

Per comprendre aquesta interpretació, fixem a, b i ϕ i considerem la «funció de distribució» següent dels valors propis de l'operador «Almost Mathieu»

$$k_{L,b,\omega,\phi}(a) = \frac{1}{L} \# \left\{ \text{valors propis} \leq a \text{ de } H_{b,\omega,\phi}|_{\{1,\ldots,L\}} \right\}$$

amb certes condicions a la frontera. Aleshores Avron i Simon ([6]; vegeu també Johnson i Moser, [20]) demostraren que el límit

$$\lim_{L \to \infty} k_{L,b,\omega,\phi}(a) = k_{b,\omega}(a),$$

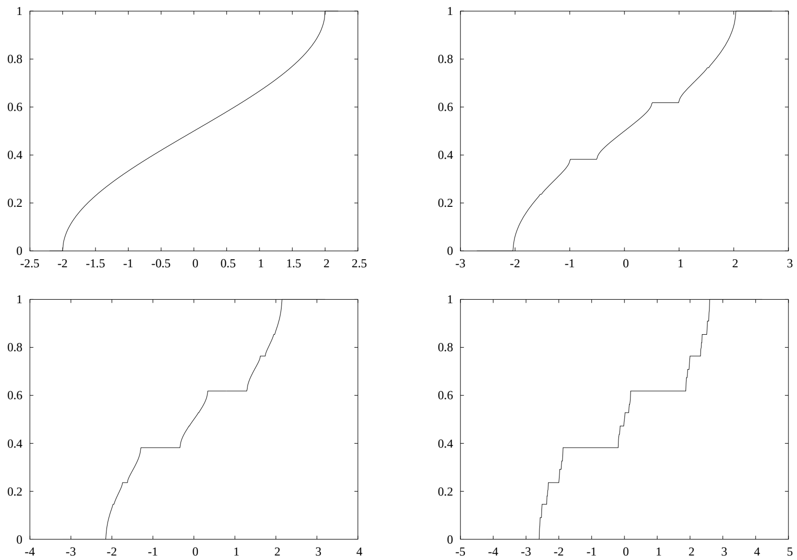

FIGURA 8: Càlcul numèric de la densitat integrada d'estats per a l'operador «Almost Mathieu» amb paràmetres $b = 0, 0,5, 1, 2$, $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$.

existeix i s'anomena *densitat integrada d'estats*, que escriurem com IDS . Aquest límit és independent de ϕ i com a funció de a és contínua i no decreixent (si fixem b). Els punts de creixement són exactament els de l'espectre de l'operador «Almost Mathieu». Aquesta funció presenta una estructura *d'escales del diable* (vegeu la figura 8) ja que si el problema dels deu martinis té solució afirmativa aleshores els intervals de constància d'aquesta funció (que són precisament els forats espectrals) són densos a l'espectre.

A més, el que explica la quantització de la conductància de Hall en el model de Peierls Harper és l'anomenat *etiquetatge dels forats espectrals* que demostraren Johnson i Moser ([20]). Si una energia pertany a la resolvent de l'operador «Almost Mathieu», aleshores la densitat integrada d'estats ha de complir

$$k_{b,\omega}(a) - \kappa\omega \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

per a un enter adient (vegeu la figura 9). En particular en el model de Peierls-Harper, es pot veure, que si l'energia de Fermi és dins d'un forat espectral (en la nostra interpretació, si a és a dins d'un forat), l'enter κ és la conductància quantitzada de Hall (vegeu Thouless *et al.* [30]).

Observem que el teorema d'etiquetatge dels forats espectrals ens dóna uns «candidats» a ser forat, però no ens diu que el forat estigui obert (encara que a l'operador «Almost Mathieu» sembla que això és el que passa, vegeu la figura 10). És a dir que, a part dels forats espectrals que són un interval obert,

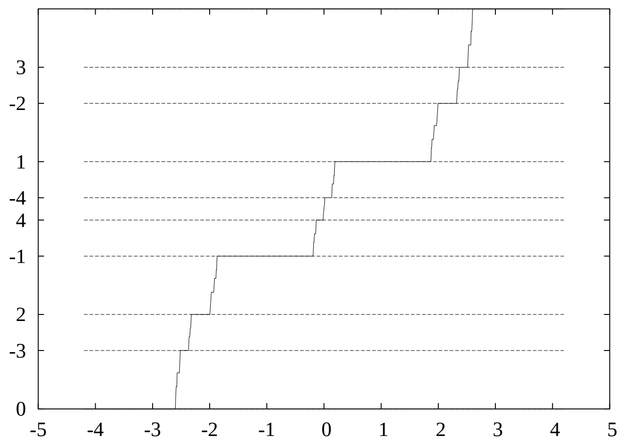

FIGURA 9: Etiquetatge dels forats espectrals per a l'operador «Almost Mathieu», $b = 2$ i $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$. L'enter en la direcció vertical correspon a l'etiqueta del forat espectral en l'equació (7) determinat per l'interval de constància de la densitat integrada d'estats.

podem parlar també de *forats col·lapsats* o *tancats* quan en una certa energia la densitat integrada d'estats compleix la relació (7) però no hi ha un interval de constància adjacent.

Com que el conjunt de valors de la IDS que satisfan alguna relació com (7) és dens i la funció és contínua, si veiem que «tots els forats espectrals estan oberts» (aquestes foren les paraules textuals de Mark Kac el 1981) l'espectre serà un conjunt de Cantor i s'explicarà la quantització de la conductància de Hall en el model de Peierls. Notem, però, que veure que tots els forats espectrals són oberts és més fort que l'estructura de Cantor; per això rep el nom del *problema fort dels deu martinis*. Per a una resposta parcial i referències, vegeu [26].

4 El Problema dels deu martinis. Un problema tancat

Aquestes tres formulacions del problema dels deu martinis que acabem de presentar (juntament amb d'altres com les àlgebres C^* que no hem tractat) donen una idea de la varietat de mètodes que s'han emprat per tal d'aconseguir, recentment, la demostració del problema dels deu martinis. Per acabar l'exposició donarem alguns dels resultats parcials que s'han obtingut des de fa més de quaranta anys, quan la qüestió fou plantejada per primer cop, i reservarem la secció següent per a un esbós de la demostració en el cas més significatiu.

Per tal d'enunciar aquests resultats és important tenir un indicador de «com de proper» és un nombre irracional de ser racional. Direm que un nom-

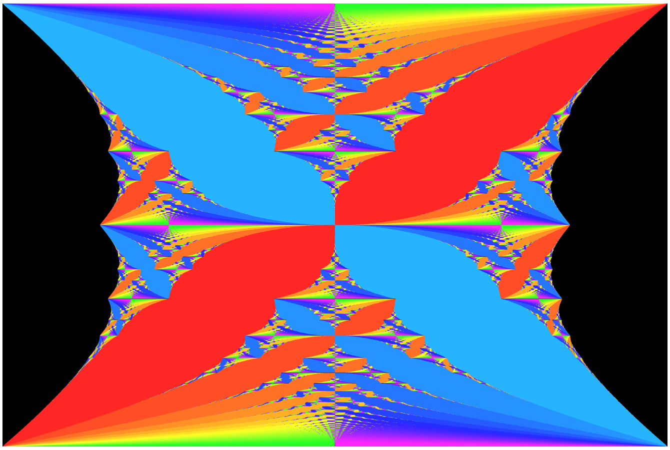

FIGURA 10: Papallona de Hofstadter amb els forats etiquetats per una tonalitat (que en la interpretació física és la conductància quantitzada). Vegeu Osadchy i Avron [24],

bre ω és *diofàntic* si existeixen constants $c > 0$ i $\tau > 1$ que compleixen les desigualtats

$$|\sin 2\pi n\omega| > \frac{c}{|n|^{\tau}}$$

per a qualsevol $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Això ho escriurem com $\omega \in DC(c,\tau)$. El conjunt de nombres que compleixen alguna condició diofàntica té mesura total. Això vol dir que el seu complementari als irracionals reals, els anomenats *nombres de Liouville*, té mesura de Lebesgue zero. Tanmateix, el conjunt de nombres de Liouville és dens i no numerable a $\mathbb{R}$.

Les estratègies de demostració són diferents en els casos de nombres diofàntics o liouvillians. Per als nombres liouvillians, s'usen resultats per al cas periòdic juntament amb resultats de continuïtat de l'espectre en aproximar el cas periòdic pel quasiperiòdic. Per als nombres diofàntics, s'usa precisament el fet que estan «lluny» dels nombres racionals, més concretament, que els termes del seu desenvolupament en fracció contínua no creixen de manera massa ràpida. En aquest darrer cas s'han combinat tècniques *KAM*, de *renormalització* i *multiescala*.

Com que per a valors de ω racional sabem que tots els forats espectrals estan oberts pel teorema 2, una possible estratègia seria aproximar el cas quasiperiòdic pel periòdic. Aquesta idea fou usada ja per Bellissard i Simon ([9]) per demostrar que el problema dels deu martinis és cert per a parelles *genèriques* de (b,ω). Aquest conjunt, tanmateix, és de mesura zero. A més, no hi ha una caracterització explícita de les freqüències per a les quals això s'esdevé, tot i que han de ser properes a racionals. En el cas de freqüències Liouville, Choi, Elliott i Yui ([12]) demostraren el problema dels deu martinis per a una subclasse dels nombres de Liouville. La resta de nombres de Liouville han estat tractats finalment per Avila i Jitomirskaya ([4]).

En el cas diofàntic, que engloba gairebé tots els nombres irracionals en sentit de la mesura de Lebesgue, els resultats s'han de classificar segons si són *pertorbatius* o no. Són pertorbatius quan donen resposta positiva al problema dels deu martinis per a un cert $\omega \in DC(c,\tau)$ si $|b|$ és més petit que una certa constant que depèn de la classe diofàntica, és a dir, de les constants c i τ. Com a resultat pertorbatiu en aquest sentit tenim el de Sinai ([29]), el 1987. Finalment, el 2004 Puig ([26]) va demostrar el problema dels deu martinis per a freqüències diofàntiques i $|b| \neq 2$.

El cas $|b| = 2$, que ja hem vist que físicament es corresponia amb el cas «quadrat», és especial ja que, a partir de les investigacions numèriques d'Aubry ([2]) es va tenir l'evidència que la mesura de l'espectre era zero (aquesta era l'anomenada «conjectura d'Aubry», també a la llista de Barry Simon, [28]). Per les propietats de la densitat integrada d'estats i l'etiquetatge dels forats, aquesta conjectura implica el problema dels deu martinis per a aquests dos valors de b. Els primers resultats en aquesta direcció els varen obtenir Helffer i Sjöstrand ([14]), el 1989, en demostrar-ho per a un conjunt de diofàntics de mesura zero. Finalment Last ([21]) i Avila i Krikorian ([5]) demostraren aquesta conjectura per a tots els valors irracionals.

Així, doncs, després de quaranta o vint-i-cinc anys (segons com comptem), el problema dels deu martinis ha estat tancat.

5 Els ingredients de la demostració

En aquesta darrera secció ens proposem esbossar la demostració del problema dels deu martinis en el cas diofàntic i acoblament $|b| \neq 2$ no crític, donada en primer lloc a [26]. Per als casos extrems, $|b| = 2$ o ω no diofàntic però irracional, que no tractarem aquí, podeu trobar una bona introducció a [3]. Molts dels conceptes i resultats que presentarem es poden enunciar en una generalitat més gran, tot i que no ho farem per tal que fer l'exposició sigui més planera.

5.1 Reductibilitat i extrems de forats

En la primera secció hem vist com es pot plantejar el problema dels deu martinis des d'una perspectiva dinàmica. És a dir, que podem passar del problema espectral de dimensió infinita a un problema de dimensió finita perquè qualsevol successió que satisfaci l'equació de valors propis queda totalment determinada pel valor de la successió en dos índexs consecutius. Hem vist també que si la freqüència és periòdica aleshores la matriu fonamental es pot expressar com la potència d'una matriu constant quan l'índex és múltiple del període. Per estendre aquest darrer concepte al cas quasiperiòdic, en el qual la freqüència és irracional, introduïm el concepte de la *reductibilitat* en una equació de Harper.

Direm que una equació de Harper, amb a i b fixats, és (analíticament) *reductible* a coeficients constants quan la seva matriu fonamental, $M_{a,b}(n, \omega, \phi)$, admet la *representació de Floquet* següent:

$$M_{a,b}(n, \omega, \phi) = Z_{a,b}\,(2\pi n\omega + \phi)\, B_{a,b}^{n} Z_{a,b}(\phi)^{-1} \tag{8}$$

essent $Z_{a,b} : \mathbb{T} \to SL(2, \mathbb{R})$ una funció analítica i $B_{a,b}$, anomenada *matriu de Floquet*, una matriu de $SL(2, \mathbb{R})$ que no depèn de ϕ. La importància de la reductibilitat en l'equació de Harper és que la matriu de Floquet codifica moltes de les propietats dinàmiques de l'equació. Per exemple, usant les idees de la secció 1 és fàcil veure que la traça de la matriu de Floquet d'una equació de Harper reductible és més petita o igual que dos si, i només si, a és a l'espectre del corresponent operador.

En la demostració usarem que, quan la traça de la matriu de Floquet d'una equació de Harper reductible val 2 o -2, la corresponent energia és a l'extrem d'un forat espectral. Aquest forat és col·lapsat (és a dir, no és un forat de veritat sinó un «candidat» a forat segons el teorema d'etiquetatge dels forats) si, i només si, la matriu és la identitat o menys aquesta (vegeu [26]).

Per tant, per a demostrar l'estructura de Cantor per a uns certs b i ω n'hi hauria prou amb veure que hi ha un conjunt d'energies a, dens a l'espectre, tals que la seva corresponent equació de Harper és reductible i la seva matriu de Floquet té traça dos, però sense ser la identitat. Tanmateix, una equació de Harper no té per què ser reductible. De fet, una conseqüència de la propera secció serà que l'equació de Harper amb freqüència irracional no pot ser reductible si $|b| > 2$ i a és a l'espectre. Paradoxalment serà el tipus de comportament de les solucions descrit a la secció vinent (incompatible amb la reductibilitat) el que ens permetrà demostrar reductibilitat per a un conjunt dens dins de l'espectre quan $|b| < 2$ i ω és diofàntic.

La reductibilitat d'equacions com la de Harper i més generals és un concepte útil en diferents contexts. Podeu trobar-ne una introducció i referències a la monografia [25].

5.2 Localització no pertorbativa

El segon ingredient important per a la demostració que presentarem és el resultat següent de Svetlana Jitomirskaya ([17]) que, en part, resol també un dels problemes de la llista de Barry Simon ([28]). Tot i que és més general que no pas com l'enunciarem, ens restringirem al cas que ens interessa.

3 Teorema (Jitomirskaya, [17]) *Suposem que ω és diofàntic. Aleshores, si $|b| > 2$ l'operador «Almost Mathieu» $H_{b,\omega,0}$ té espectre purament puntual, és a dir, existeix una base ortonormal de $l^2(\mathbb{Z})$ formada per vectors propis. A més, aquests vectors propis decauen exponencialment (direm que estan* exponencialment localitzats*). Això és, si $(\psi)_{n\in\mathbb{Z}}$ és un d'aquests vectors propis, aleshores podem trobar constants positives α i β de manera que $|\psi_n| < \alpha e^{-\beta|n|}$ per a qualsevol n.*

Aquest és un resultat no pertorbatiu, segons la classificació que hem fet a la secció anterior, ja que encara que es demana que ω sigui diofàntic, $\omega \in DC(c,\tau)$ per a uns certs c i τ, el resultat no depèn d'aquestes constants.

En termes de l'equació de Harper, el resultat de Jitomirskaya ens diu que si $|b| > 2$ i ω és diofàntic, aleshores per cada valor propi, $a \in \sigma_{pp}(b,\omega,0)$, l'equació de Harper corresponent

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b\cos(2\pi\omega n)\, x_n = a x_n, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

té una solució localitzada exponencialment. Donat que els vectors propis han de formar una base de $l^2(\mathbb{Z})$ és fàcil veure que $\sigma_{pp}(b,\omega,0)$ és dens a l'espectre. Anem a veure que les energies de $\sigma_{pp}(b,\omega,0)$ són extrems de forats espectrals oberts, amb la qual cosa obtindrem l'estructura de Cantor.

Observem, finalment, que l'existència de solucions localitzades és incompatible amb la reductibilitat, ja que no hi ha cap representació de Floquet com (8) que permeti generar solucions localitzades (al menys amb la definició de $Z_{a,b}$ regular com hem donat). En efecte, per a una equació de Harper reductible, si una solució no nul·la decreix exponencialment a $-\infty$, aleshores forçosament ha de créixer exponencialment a $+\infty$ i això exclou les solucions localitzades. Per tant, no podem demostrar que els valors propis de $\sigma_{pp}(b,\omega,0)$ són extrems de forats de l'espectre usant la caracterització de la reductibilitat als extrems dels forats. Per poder-ho fer haurem d'usar el truc de la dualitat d'Aubry que presentem tot seguit.

5.3 Dualitat d'Aubry

Un tret distintiu de l'equació de Harper és l'anomenada *dualitat d'Aubry* i és el que ens permetrà passar del règim *localitzat* $|b| > 2$ al règim *estès* $|b| < 2$. Tot i que té diverses versions, totes es basen en una idea molt senzilla ([2]). Sigui $(\psi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una solució localitzada exponencialment de l'equació de Harper per a un cert a (que serà valor propi) i un $|b| > 2$. Podem prendre, per exemple, les solucions del resultat de Jitomirskaya quan ω és diofàntic.

La transformada de Fourier de ψ,

$$\tilde{\psi}(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n e^{i\theta n}$$

és una funció 2π-periòdica i analítica a causa del decreixement exponencial dels ψ_n. Com que els seus coeficients de Fourier satisfan l'equació (9), és fàcil veure que la successió quasiperiòdica

$$x_n = \tilde{\psi}(2\pi\omega n + \theta), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

satisfà la relació següent:

$$x_{n+1} + x_{n-1} + \frac{4}{b}\cos(2\pi\omega n + \theta) x_n = \frac{2a}{b} x_n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Observem que aquesta és una equació de Harper, la seva *equació dual*, però els paràmetres han canviat: si abans $|b| > 2$, ara el seu mòdul és més petit que 2. Però el que és important per a l'estructura de Cantor és que l'existència d'una solució quasiperiòdica com $(x_n)_n$ amb $\tilde{\psi}$ analítica implica que l'equació de Harper dual (11) és analíticament reductible i podem triar la matriu de Floquet com

$$B_{2a/b,b/4} = \begin{pmatrix} 1 & f_{a,b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

per a un cert $f_{a,b} \in \mathbb{R}$. Per a demostrar-ho cal usar l'existència de la solució quasiperiòdica per a «triangularitzar» la matriu fonamental i la condició diofàntica per a resoldre un problema unidimensional de petits divisors (vegeu [26]).

Amb la caracterització de la secció 5.1 només cal veure que si $a \in \sigma_{pp}(b, \omega, 0)$, aleshores l'element fora de la diagonal, $f_{a,b}$, és no nul. Si veiem això tindrem l'estructura de Cantor per a $|b| < 2$. Per a $|b| > 2$ el resultat també se seguirà, ja que una de les conseqüències de la dualitat d'Aubry, demostrada a [6], és la invariància de la IDS per la dualitat d'Aubry

$$k_{b,\omega}(a) = k_{4/b,\omega}\left(\frac{2a}{b}\right)$$

per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$ i b no nul. En particular, usant la caracterització de l'espectre en termes del creixement de la densitat integrada d'estats, és clar que a és a l'espectre $\sigma(b, \omega)$, amb $b \neq 0$ si, i només si, $2a/b$ és a l'espectre del dual $\sigma\left(\frac{4}{b}, \omega\right)$. Per tant, l'estructura de Cantor per a $|b| > 2$ se seguirà de l'estructura de Cantor quan $|b| < 2$. Anem a veure això darrer.

5.4 L'argument d'Ince

Com hem vist, per a demostrar l'estructura de Cantor només cal veure que les matrius de Floquet (12), a les quals podem reduir l'equació de Harper dual (11) quan a és un dels valors propis donats pel resultat de Jitomirskaya, no són la identitat, ja que això voldria dir que el forat és col·lapsat. Aquest és el punt clau de la demostració, ja que és, juntament amb la dualitat d'Aubry, el més específic de l'operador «Almost Mathieu» respecte d'altres operadors de Schrödinger quasiperiòdics (vegeu la figura 5). Paradoxalment la resposta a aquest fet crucial té gairebé vuitanta anys!

Ince, el 1927, investigà *l'equació de Mathieu* (que dóna nom a l'operador «Almost Mathieu»),

$$x'' + (a + b\cos t)\, x = 0^{\circ},, \tag{13}$$

que és una equació diferencial de segon ordre, periòdica en el temps. Ince veié en aquesta equació, que quan $b \neq 0$ no es pot donar la *coexistència* de dues solucions periòdiques (o antiperiòdiques) linealment independents per a uns mateixos valors de a i b. Per fer-ho veié que els coeficients de Fourier d'una solució periòdica han de complir una equació en diferències del tipus

$$b\,(x_{k+1} + x_{k-1}) + k^2 x_k = -a x_k\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{14}$$

que és també lineal i de segon ordre. Ara bé, una equació d'aquest tipus no pot tenir dues solucions a $l^2(\mathbb{Z})$ linealment independents, ja que aleshores la matriu fonamental no podria tenir determinant constant. Per a solucions antiperiòdiques es procedeix de manera similar i contradiu la coexistència per a l'equació de Mathieu (13).

Per reproduir aquest argument en el nostre cas, comencem observant que l'equació de Harper (1), igual que l'equació «dual» de Mathieu (14), no pot tenir simultàniament dues solucions a $l^2(\mathbb{Z})$ linealment independents. Com que la independència lineal es preserva per la dualitat d'Aubry, l'equació de Harper dual (11) no pot tenir dues solucions quasiperiòdiques del tipus (10) linealment independents. Però això és precisament el que passaria si la matriu de Floquet $B_{a,b}$ fos la identitat, com es dedueix de la representació de Floquet (8). Per tant, el forat espectral és obert i això acaba la demostració en el cas diofàntic i no crític.

Agraïments Agraeixo a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC el permís per a incloure aquesta versió ampliada de l'exposició apareguda al seu *Butlletí Digital de la FME*, amb motiu del *Curs Einstein*. Aquesta recerca ha estat finançada en part pels ajuts DGICYT BFM2000-805, BFM2003-09504-C02-01 i CIRIT 2001 SGR-70.

Referències

[1] Arnol'd, V. I. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Volum 250 de la «Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften». Nova York: Springer-Verlag, 1983.

[2] Aubry, S.; Andrè, G. *Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices*. A «Group theoretical methods in physics (Proc. Eighth Internat. Colloq., Kiryat Anavim, 1979)». Bristol: Hilger, 1980, 133–164.

[3] Avila, A.; Jitomirskaya, S. *Solving the Ten Martini Problem*. Proceedings of Qmath9, 2005. [Per aparèixer].

[4] Avila, A.; Jitomirskaya, S. *The Ten Martini Problem*. Prepublicació, 2005.

[5] Avila, A.; Krikorian, R. *Reducibility or non-uniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles*. Annals of Mathematics, 2003. [Per aparèixer].

[6] Avron, J.; Simon, B. «Almost periodic Schrödinger operators II. The integrated density of states». *Duke Math. J.*, 50 (1983), 369–391.

[7] Avron, J. E.; Osadchy, D.; Seiler, R. «A topological look at the quantum hall effect». *Physics Today*, (agost 2003), 38–42.

[8] Azbel, M. Ya. «Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field». *Soviet Phys. JETP*, 19 (1964), 634–645.

[9] Bellissard, J.; Simon, B. «Cantor spectrum for the almost Mathieu equation». *J. Funct. Anal.*, 48 (3) (1982), 408–419.

[10] Bellissard, J.; Elst, A. van; Schulz-Baldes, H. «The noncommutative geometry of the quantum Hall effect». *J. Math. Phys.*, 35 (10) (1994), 5373–5451. Topology and physics.

[11] Broer, H. W.; Puig, J.; Simó, C. «Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill-Schrödinger equation». *Comm. Math. Phys*, 241 (2–3) (2003), 467–503.

[12] Choi, M. D.; Elliott, G. A.; Yui, N. «Gauss polynomials and the rotation algebra». *Invent. Math.*, 99 (2) (1990), 225–246.

[13] Harper, P. G. «Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field». *Proc. Phys. Soc. London*, A68 (1955), 874–892.

[14] Helffer, B.; Sjöstrand, J. «Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'équation de Schrödinger avec champ magnétique)». *Mém. Soc. Math. France (N. S.)*, (34), 113 pp. (1989), 1988.

[15] Hofstadter, D. R. «Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields». *Phys. Rev. B*, 14 (6) (1976), 2239–2249.

[16] Hofstadter, D. R. *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*. Nova York: Basic Books Inc. Publishers, 1979.

[17] Jitomirskaya, S. «Metal-insulator transition for the almost Mathieu operator». *Ann. of Math. (2)*, 150 (3) (1999), 1159–1175.

[18] Jitomirskaya, S. Ya.; Krasovsky, I. V. «Continuity of the measure of the spectrum for discrete quasiperiodic operators». *Math. Res. Lett.*, 9 (4) (2002), 413–421.

[19] Johnson, R. «The recurrent Hill's equation». *J. Diff. Eq.*, 46 (1982), 165–193.

[20] Johnson, R.; Moser, J. «The rotation number for almost periodic potentials». *Comm. Math. Phys.*, 84 (1982), 403–438.

[21] Last, Y. «A relation between a.c. spectrum of ergodic Jacobi matrices and the spectra of periodic approximants». *Comm. Math. Phys.*, 151 (1) (1993), 183–192.

[22] Last, Y. *Almost everything about the almost Mathieu operator. I.* In *XIth International Congress of Mathematical Physics (París, 1994)*. Cambridge, MA: Internat. Press, 1995, 366–372.

[23] Magnus, W.; Winkler, S. *Hill's equation*. Nova York: Dover Publications Inc., 1979.

[24] Osadchy, D.; Avron, J. «Hofstadter butterfly as quantum phase diagram». *J. Math. Phys.*, 42 (12) (2001), 5665–5671.

[25] Puig, J. *Reductibilitat d'equacions diferencials lineals amb coeficients quasiperiòdics*. 2003. Memòria presentada al premi *Évariste Galois* de la Societat Catalana de Matemàtiques.

[26] Puig, J. «Cantor spectrum for the Almost Mathieu operator». *Comm. Math. Phys*, 244 (2) (2004), 297–309.

[27] Reed, M.; Simon, B. *Methods of modern mathematical physics. I.* 2a ed. Nova York: Academic Press Inc. 1980. Functional analysis.

[28] Simon, B. «Almost periodic Schrödinger operators: a review». *Adv. in Appl. Math.*, 3 (4) (1982), 463–490.

[29] Sinai, Ya. G. «Anderson localization for one-dimensional difference Schrödinger operator with quasiperiodic potential». *J. Statist. Phys.*, 46 (5-6) (1987), 861–909.

[30] Thouless, D. J.; Kohmoto, M.; Nightingale, M. P.; Nijs, M. den. «Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential». *Phys. Rev. Lett.*, 49 (6) (1982), 405–408.

[31] Mouche, P. van. «The coexistence problem for the discrete Mathieu operator». *Comm. Math. Phys.*, 122 (1) (1989), 23–33.

Departament de Matemàtica Aplicada I,
Universitat Politècnica de Catalunya
Av. Diagonal 647, 08028 Barcelona
joaquim.puig@upc.edu